المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

امتحانات الدورة التكميلية للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر الجبر (1)
سنة ثانية رياضيات

...عة البعث
...ة العلوم
...م الرياضيات

...عن الأسئلة الآتية:

...ال الأول (48 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

...ن المجموعة $\{0, 2, 4\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_8 .

...ن عدد العناصر التي كل منها يولد الزمرة الدوارة $G=<a>$ التي مرتبتها العدد الأولي (p) يساوي p.

...رتبة العنصر (i) في الزمرة $(C^*, \cdot)$ غير منتهية، حيث C^* الأعداد العقدية المغايرة للصفر.

...رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر 5 من الزمرة $(Z_7, +)$ تساوي 5 .

...جميع مولدات الزمرة $(Z_{12}, +)$ أعداد أولية.

...عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $10Z$ في الزمرة $2Z$ يساوي 10 .

...ن العنصر a^7 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 91 .

...ذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^8 في G تساوي 6.

...ن عناصر الزمرتين الجزئيتين $<3>$ ، $<7>$ في الزمرة $U(20)$ هو نفسه.

...ن مركز الزمرة $(R/\{0\}, \cdot)$ يساوي 1 حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

...ن عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 5 .

...ذا كان $\varphi: U(40) \to U(40)$ تشاكلاً و $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1, 9, 17, 33\}$ و $\varphi(11) = 11$
. $\varphi^{-1}(11) = 11 + \ker$

...ن رتبة العنصر $(2, 2)$ من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 12 .

...عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_8 يساوي 40.

...ن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(10)$.

...ذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على 3 فإن الزمرة التي مرتبتها 81 هي 3- زمرة ...يلوفية في G.

...الثاني (52 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

...المجموعة $Z(G) = \{a : a \in G; ax = xa, \forall x \in G\}$ هي زمرة جزئية من G.

...كان $a, b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.

...زمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

...كانت G منتهية وغير تبديلية مرتبتها p^3 حيث p عدد أولي وكان $Z(G) \neq <e>$، فإن ...$(Z(G) : 1$.

...كانت G منتهية فأثبت أن مرتبة أية زمرة جزئية K من G تقسم مرتبة الزمرة G.

...كانت G منتهية و p- زمرة (p عدد أولي) فإن كلاً من $Z(G)$ و $G/Z(G)$ هي p- زمرة.

2015 - 9 - 1...

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إياد الفوج

(1) ص

سلم تصحيح مقرر الجبر /1/

الدورة التكميلية للعام 2014 - 2015

س ع ر ياضيات

السؤال الأول (32 درجة) لكل بند درجتان

1) خطأ، لأن $2 \cdot 4 = 8 \notin \{0, 2, 4\}$.

2) خطأ، يساوي $p-1$.

3) خطأ، يساوي 4.

4) خطأ، $\langle 5 \rangle = Z_8$.

5) خطأ، 1 مولد غير أولي.

6) خطأ، يساوي 5.

7) خطأ، لأن $(9, 21) \neq 1$ ...

8) خطأ، يساوي e لأن $(a^8)^3 = a^{24} = e$

9) صح.

10) خطأ، يساوي $R \setminus \{0\}$.

11) خطأ، يساوي 4.

12) خطأ، يساوي $\varphi(11) = 11 \ker \varphi$

13) خطأ، يساوي 6.

14) خطأ، يساوي 4.

15) خطأ، $U(10) \cong Z_4$.

16) صح.

السؤال الثاني (52 درجة)

1) بما أن $ex = xe$ مهما يكن $x \in G$، فإن $e \in Z(G)$، ليكن $a, b \in Z(G)$

عندئذٍ أيًا كان $x \in G$ فإن $bx = xb$ ومنه $b^{-1}x = xb^{-1}$ كذلك ما ...

(3)

[illegible]

(١) $a \in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(a$

ومنه $\forall x \in G$ ومنه (G)

(١) $\forall x \in G$ فإن $x(ab)$

[illegible] $x = b^{-1}$

$(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$

$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = ab$

ومنه $\forall b \in G$

(٢) لنبرهن: $bZ(G)b^{-1} \subset Z(G)$

ليكن $x \in bZ(G)b^{-1}$ [illegible] $y \in Z(G)$ حيث

$x = byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G)$

ومنه $Z(G)$ ناظمية في (G)

(٣) [illegible] p^2 [illegible] $Z(G)$ [illegible] p^2 ، $(Z(G):1) \in \{1, p, p^2\}$

ويكون $Z(G) \neq \langle e \rangle$ فإن $(Z(G):1) \neq 1$ [illegible] G

[illegible] فإن $(Z(G):1) \neq p^2$ ومنه $Z(G)$ [illegible]

بما أن $p = \frac{p^2}{p^2} = \frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = (G/Z(G):1)$ [illegible] $\frac{G}{Z(G)}$ دوارة

ومنه G [illegible] وهذا مرفوض [illegible] $(Z(G):1) \neq p^2$

ومنه $(Z(G):1) = p$

(٤) [illegible] aH، a_iH [illegible] H في G

[illegible] $M_r = \{a_1H, \dots\}$ [illegible] G [illegible] $G = a_1H \cup \dots$

$\mathrm{Card}\,G = \mathrm{Card}\,a_1H + \dots$ ، $(G:1) = \mathrm{Card}\,a_1H + \dots = r\,\mathrm{Card}\,H$ [illegible] $(H:1)$

(٥) [illegible] G [illegible] p [illegible] $Z(G)$ [illegible]

إذا $a \in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$

وذلك $\forall x \in G$ ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية من G

2) إذا كان $\forall x \in G$ فإن $(ab)x = x(ab)$

لنأخذ $x = b^{-1}$ ومنه $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$ ومنه

$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = ab$

3) لنبرهن أن $bZ(G)b^{-1} \subset Z(G)$ ومنه $\forall b \in G$

ليكن $x \in bZ(G)b^{-1}$ ومنه يوجد $y \in Z(G)$ ومنه

(ومنه $Z(G)$ ناظمية في G) $x = byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G)$

4) حسب لاغرانج $Z(G)$ زمرة جزئية [illegible] p^3 [illegible] $Z(G)$

ولكون $Z(G) \neq \langle e \rangle$ فإن $(Z(G):1) \neq 1$ [illegible]

[illegible] $(Z(G):1) \neq p^3$ ومنه $Z(G)$ [illegible]

بما أن $(G:1) = p^3$ و $\frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = \frac{p^3}{p^2} = p$ أي $(G/Z(G):1)$ ومنه $G/Z(G)$ دائرية

ومنه G تبديلية وهذا مرفوض كونها أن $(Z(G):1) \neq p^2$

ومنه $(Z(G):1) = p$

5) لتكن a_1H, a_2H, a_3H الأصناف اليسارية المختلفة الآتية

مما نستنتج أن $M_l = \{a_1H, a_2H, a_3H\}$ تشكل تجزئة لـ G أي $G = a_1H \cup a_2H \cup a_3H$

$\text{Card}\,G = \text{Card}\,a_1H + \text{Card}\,a_2H + \text{Card}\,a_3H = (G:1) = \sum \text{Card}\,H = n\,\text{Card}\,H$

6) $Z(G)$ زمرة جزئية من G رتبتها p [illegible] $Z(G)$

[illegible] G و $G/Z(G)$ [illegible] وتكون أيضاً p [illegible]